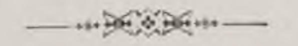
ИДЕИ

непрерывности

и прерывности.

(Рѣчь, читанная въ годичномъ засѣданіи Физико-Математическаго Казанскаго Общества 20-го марта 1905 года).

Приватъ-доцентъ Н. Парфентьевъ.



КАЗАНЬ.
Типо-литографія Императорскаго Университета.
1905.

Печатано по опредѣленію Совѣта Физико - Математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Предсѣдатель *А. Васильевъ.*

Идеи непрерывности и прерывности.

(Рѣчь, читанная въ годичномъ засѣданіи Физико-Математическаго Общества 20 марта 1905 года).

Человѣческая мысль всегда съ самыхъ древнихъ сѣдыхъ временъ исторіи пыталась отдать себѣ по возможности ясный, но сжатый, связный и обнимающій все прошлое, настоящее и будущее „Вселенной" отчетъ, т е. создавала себѣ то, что мы теперь называемъ словомъ „міропониманіе". Послѣднее подъ вліяніемъ эпохи и ея культурно-научной структуры, разумѣется, мѣнялось, мѣнялось съ каждымъ новымъ завоеваніемъ въ области науки, съ каждой новой идеей, а благодаря этому міръ и его жизнь, ростъ, развитіе человѣчествомъ понимались различно въ различное времени. Такъ, напр., Вселенная Птоломея и Вселенная Коперника не одно и тоже пониманіе одного и того же. Выражаясь языкомъ математики, представленія наши о мірѣ, какъ суммѣ ощущеній и переработкѣ этихъ послѣднихъ въ сознаніи человѣка, являются всегда для насъ функціей многозначной, функціей отъ безчисленнаго множества перемѣнныхъ факторовъ. Разумѣется, это признаніе не является радостнымъ для человѣчества: вѣдь оно говоритъ, что „Истина" для насъ является многоликимъ сфинксомъ, но оно не убиваетъ бодрости и вѣры въ прогрессъ, въ движеніе впередъ и въ возможность этого движенія—человѣчество теперь не безоружно, его прошлое имѣетъ слишкомъ много побѣдъ, переустроивавшихъ и улучшавшихъ жизнь человѣчества, побѣдъ дававшихъ возможность порабощать и эксплуатировать даже самую природу.

Итакъ человѣческое міропониманіе величина не постоян-

ная и оно не можетъ быть постояннымъ, и законченнымъ, ибо число перемѣнныхъ факторовъ, и ихъ ростъ и значеніе никогда не остаются одними и тѣми же; но не смотря на это человѣчество съумѣло въ хаосѣ безчисленнаго множества факторовъ, создающихъ міропониманіе выдѣлить для себя нѣкоторые важнѣйшіе, являющіеся для него фундаментами — эти важнѣйшіе факторы суть нѣкоторыя идеи, обладающія для насъ характеромъ убѣдительной ясности, понятности и даже универсальности. Вотъ подъ вліяніемъ такихъ-то, добываемыхъ упорной и неутомимой научной работой, идей и создается наше міропониманіе, нашъ взглядъ на міръ въ его прошломъ, настоящемъ и будущемъ. Особенно сильное вліяніе, можно сказать, прямо колоссальное въ вопросахъ міропониманія всегда оказывала одна идея, это—идея непрерывности. Еще древніе думали, что natura saltum non facit. Идея непрерывныхъ, т. е. постепенныхъ послѣдовательныхъ малыхъ измѣненій въ процессахъ какого-либо явленія были, конечно, извѣстны и древнимъ и притомъ извѣстны вѣроятно въ очень сѣдыя времена древности: вѣдь самый ростъ человѣка, животныхъ, растеній и т. п. —все это должно было очень рано навести на идею непрерывности и на ея господство въ природѣ, Вселенной. Тѣмъ не менѣе мы скажемъ, что не древніе все же постигли всю мощь и жизненность идеи „непрерывности“: правда она не была имъ чуждой, но они не пытались прослѣдить её всюду—во всѣхъ областяхъ жизни, науки, искусства, и не пытались пользоваться ею, какъ орудіемъ, какъ методомъ въ своихъ изысканіяхъ и изслѣдованіяхъ. Объяснить это можно, конечно, невысокимъ развитіемъ опытныхъ наукъ, которыя всегда стремятся къ точности и ясности въ своихъ выводахъ, пользуясь какъ орудіемъ точности и опредѣленности *мѣрой*, *числомъ* и *опытомъ*; древнимъ же такой методъ изслѣдованія былъ, вообще говоря, чуждъ, а кромѣ того вѣдь ясно теперь каждому,

что идея непрерывности не связывалась древними съ понятіемъ „мѣры“ и „числа“. Поэтому впервые идея непрерывности стала точно формулироваться лишь тогда, когда математическія науки настолько подвинулись впередъ, что идея непрерывности могла быть уже интерпретирована математически и слѣд. стала усчитываемой въ извѣстныхъ случаяхъ. Это случилось въ концѣ XVII вѣка, когда обнаружилась потребность въ исчисленіи безконечно-малыхъ. Исчисленіе безконечно-малыхъ зародилось въ задачахъ Кеплера (1615), Кавальери (1635), Ферма (1654), Роберваля, Паскаля (1658) и было окончательно обрисовано, какъ самостоятельная дисциплина математики, приложимая ко всѣмъ вопросамъ анализа и геометріи, связаннымъ съ идеей непрерывнаго измѣненія, Лейбницемъ (въ 1604—1686 г.) и Ньютономъ. Эта эпоха созданія исчисленія безконечно-малыхъ является величайшей въ исторіи человѣчества: въ этотъ моментъ идея непрерывности стала все глубже и глубже проникать въ различныя отрасли человѣческаго знанія. Такъ, математики выдѣлившіе съ теченіемъ времени въ исчисленіи безконечно-малыхъ двѣ огромнѣйшихъ части — дифференціальное и интегральное исчисленія и съумѣвшіе разрѣшить тьму самыхъ трудныхъ и общихъ задачъ чистой математики и геометріи и открыть *общій методъ* изслѣдованія различныхъ вопросовъ анализа и геометріи, связанныхъ съ идеей непрерывности, обратились къ механикѣ, въ основѣ которой лежитъ идея непрерывнаго движенія, и благодаря исчисленію безконечно-малыхъ сразу поставили механику на незыблемую почву, открывши рядъ дифференціальныхъ уравненій, позволяющихъ въ самомъ общемъ видѣ изслѣдовать самыя запутанныя случаи какъ движенія, такъ и равновѣсія различныхъ системъ какъ точекъ, такъ и тѣлъ жидкихъ, твердыхъ и газообразныхъ. Отъ механики вообще математическія науки обратились къ Астрономіи и, будучи

приложены къ послѣдней, создали огромнѣйшую новую вѣтвь математическихъ наукъ „Небесную механику“, результаты и выводы которой имѣли особенно важное вліяніе на человѣческое міросозерцаніе.

Законъ тяготѣнія Ньютона и Высшій анализъ произвели въ Астрономіи чудеса: человѣчество съумѣло постичь вполнѣ строеніе нашей солнечной системы, а также заглянуть не только въ ея прошлое, но даже и будущее. Тѣ космогоническія представленія, какія возможны теперь, стали развиваться лишь послѣ созданія Небесной Механики... Такіе умы какъ Lagrange, Кантъ и Лапласъ не только пытались воскресить прошлое нашей солнечной системы, но и изслѣдовали ея устойчивость, и прочность... И всѣ эти успѣхи обязаны въ сущности одному — умѣлому пользованію дифференціальнымъ и интегральнымъ исчисленіями въ вопросахъ Астрономіи — въ вопросахъ взаимоотношеній тѣлъ, составляющихъ нашу солнечную систему, а приложеніе этихъ дисциплинъ математики обусловливалось, конечно, возможностью наблюдать „непрерывность“ въ движеніи и взаимоотношеніяхъ тѣлъ, составляющихъ солнечную систему. Такимъ образомъ и здѣсь въ Астрономіи идея непрерывности оказалась въ высшей степени плодотворной. Успѣхи геометріи, механики, и астрономіи дали надежду и физикамъ на успѣхъ тѣмъ болѣе, что и тамъ сплошь и рядомъ наблюдались непрерывныя измѣненія въ различныхъ процессахъ и явленіяхъ.

И вотъ благодаря трудамъ Лапласа, Гаусса, Грина, Коши и Ампера физика быстро математизировалась и стала съ необычайной быстротой развиваться далѣе, такъ что спустя немного времени даже такія главы, какъ свѣтъ, магнитизмъ и электричество благодаря работамъ Френеля, Фарадея и Масквелля стали на прочную почву, и съ этихъ поръ и въ физикѣ помимо опыта стало царить еще отвлеченное мышленіе, предсказывающее опытъ. Если здѣсь поставятъ вопросъ: „по-

чему, напр., такія главы, какъ свѣтъ, магнитизмъ и электричество могли сдѣлаться математизированными?" — то отвѣтъ ясенъ: успѣхъ изслѣдованій Максвелля, положимъ, въ области свѣта и электричества обусловленъ въ значительной степени тѣмъ, что, допуская существованіе эфира, какъ нѣкой міровой среды, Максвелль въ состояніи былъ пользоваться дифференціальнымъ и интегральнымъ исчисленіемъ. Одной изъ величайшихъ побѣдъ въ области физики и вообще физическихъ наукъ, сдѣланныхъ при помощи опыта и математики, было завоеваніе „закона сохраненія энергія" и „второго начала термодинамики", пробившихъ себѣ дорогу къ другимъ наукамъ естествознанія—химіи, біологіи и др. Чѣмъ же обусловливался успѣхъ человѣческихъ изысканій въ упомянутыхъ наукахъ? Какую роль въ нихъ играла идея непрерывности, а слѣдовательно и математика? Точнѣе—какъ идея непрерывности направляла усилія и характеръ работъ ученыхъ только что упомянутыхъ областей? На эти вопросы можно отвѣтить, имѣя въ виду сразу всѣ науки, приложеніе къ коимъ идеи непрерывности будетъ всегда плодотворно. Въ самомъ дѣлѣ, когда мы можемъ воспользоваться идеей непрерывности указаннымъ способомъ? Во 1° очевидно тогда, когда въ изслѣдуемыхъ нами явленіяхъ мы въ состояніи подмѣчать послѣдовательность и постепенность и отсутствіе рѣзкихъ скачковъ, переходовъ отъ одного процесса къ другому. Во 2° тогда, когда одному или многимъ фактору эффектъ, съ ними сопряженный,—однозначенъ. Вотъ существенные признаки тѣхъ явленій, въ изученій коихъ идея „непрерывности" является особенно плодотворной, и она будетъ и бывала чрезвычайно плодотворной особенно тамъ, гдѣ удавалось записать изучаемые нами процессы математически, ибо тогда изъ дифференціальныхъ соотношеній всегда можно получить интегральныя или суммарныя соотношенія. Конечно интересными являются

интегральныя соотношенія и законы: законъ Ньютона или Кулона, напр., яснѣй говоритъ, чѣмъ мысль тѣхъ же законовъ, записанная дифференціальнымъ соотношеніемъ Пуассона.

Успѣхъ обрисованныхъ только что наукъ давалъ, конечно, неотразимый толчокъ и другимъ наукамъ итти такимъ же путемъ, и вотъ человѣчество обратилось къ опыту въ самой широкой степени, а послѣдній по существу сплошь и рядомъ сводился къ изученію явленій и различныхъ процессовъ въ природѣ въ опредѣленныхъ размѣрахъ, опредѣленной обстановкѣ и притомъ въ крайне очерченной и ограниченной области, т. е. здѣсь человѣкъ сплошь и рядомъ изъ безконечнаго большого разнообразія и многообразія природы выдѣлялъ—съ точки зрѣнія Вселенной—лишь безконечно малое единообразіе и его изучалъ. Методъ такимъ образомъ, выражаясь грубо, былъ подобенъ универсальному почти методу математическому. Выдѣляемое единообразіе, какъ однородное, тщательно изучалось, изслѣдовалось, причемъ очень часто оказывалось, что оно измѣнялось непрерывность. Вѣра въ непрерывность всего сущаго подтверждалась очень часто непосредственнымъ наблюденіемъ какъ разъ именно непрерывнаго развитія изучаемаго объекта, явленій, процесса. Такъ въ умахъ человѣчества постепенно назрѣвала „эволюціонная идея“, примѣненная впослѣдствіи ко всему Космосу. И въ самомъ дѣлѣ, за физическими науками идея непрерывности быстро перешла въ біологическія и вылилась тамъ въ стройныхъ системахъ Ламарка и Дарвина.

Значеніе названныхъ теорій—колоссально: человѣчество теперь могло думать, что жизнь не только мертвой природы, но и живой можетъ быть изучаема и изслѣдуема методомъ, уже испытаннымъ, методомъ точныхъ положительныхъ наукъ. И вотъ на сцену человѣческой мысли появляется стройная, законченная философія Огюста Конта, въ которой, какъ въ зеркалѣ, отразились вѣрованія человѣчества въ возмож-

ность изученія всей Вселенной методами положительныхъ наукъ, причемъ идеаломъ для каждой отрасли человѣческаго знанія являлись вполнѣ математизировавшіяся науки—такія, какъ геометрія, механика, физика, астрономія. Подъ вліяніемъ все болѣе и болѣе проникающей въ человѣческое сознаніе мысли, что весь Космосъ подчиненъ непрерывной, детерминистической закономѣрности, О. Контъ пытался закончить свою „положительную философію созданіемъ *соціальной физики*, которую онъ прибавлялъ къ цѣлой стройной системѣ положительныхъ наукъ—небесной физики, физики земной, механической, химической и физикѣ органической — растительной и животной. Но попытки сдѣлать ученіе объ общественныхъ, соціальныхъ процессахъ ученіемъ дѣйствительно основаннымъ на методахъ физическихъ наукъ и притомъ прежде всего на пользованіи при изученіи общественныхъ явленій математикой принадлежитъ не Конту, а Зюссмильху—прусскому священнику, еще въ 1741 году издавшему книгу, посвященную изложенію статистическаго метода и искавшему въ своей книгѣ „божественный порядокъ“ въ массовыхъ явленіяхъ человѣческой жизни. Попытка несомнѣнно смѣлая и на нее тогда не обратили большого вниманія. Зато спустя цѣлое почти столѣтіе Кетле выпустилъ книги, въ которыхъ онъ гораздо смѣлѣй и полнѣй проводилъ мысль Зюссмильха и уже громко говорилъ о соціальной физикѣ, какъ о наукѣ опытной и притомъ такой, къ изслѣдованію объектовъ коей необходимо прилагать математику. Свой основной принципъ, относящійся къ явленіямъ этого рода, онъ выражаетъ слѣдующими словами *): „чѣмъ значительнѣй наблюдаемое число индивидуумовъ, тѣмъ болѣе индивидуальныя особенности — будь то физическія или моральныя, стушевываются и даютъ преобла-

*) Quetelet, sur l'homme p. 12.

даніе ряду общихъ обстоятельствъ, вслѣдствіе которыхъ общество существуетъ и сохраняется“.

На общество Кетле смотрѣлъ, конечно, какъ на соціальный организмъ, подчиненный несомнѣнно непреложнымъ и строгимъ законамъ. Вотъ какъ онъ выражаетъ эту мысль **): „Этотъ организмъ существуетъ благодаря консервативному началу, какъ все, что вышло изъ рукъ Всемогущаго; онъ имѣетъ также свою физіологію, какъ самое низшее изъ органическихъ существъ. Когда мы смотримъ на него съ высшей точки зрѣнія, мы находимъ законы столь же точные, столь же непреложные, какъ законы, которые управляютъ небесными тѣлами; мы возвращаемся къ явленіямъ такой физики, въ которой свободная воля человѣка окончательно стушевывается, чтобы дать восторжествовать безъ препятствія только дѣлу Творца. Совокупность этихъ законовъ, которые существуютъ внѣ временъ, внѣ каприза человѣка, составляетъ особую науку, которую я нашелъ возможнымъ назвать *соціальной физикой*“. Но особенно рѣзко точка зрѣнія математика на всю Вселенную была выражена Лапласомъ, учителемъ Кетле. Лапласъ, занимавшійся много теоріей вѣроятностей—наукой, имѣющей дѣло съ такъ называемыми случайными явленіями и прилагавшій принципы этой отрасли математики къ различнаго рода общественнымъ вопросамъ, понималъ весь міръ, какъ систему безчисленнаго множества факторовъ, роль коихъ можетъ быть записана дифференціальными ур-іями, и слѣдовательно тогда величайшій умъ, который съумѣлъ бы это сдѣлать, могъ бы знать все — какъ прошлое, такъ и будущее всего Космоса, и не только знать, но и понимать, и объяснять себѣ все какъ въ живой, такъ и въ мертвой природѣ. Такая мысль была навѣяна, конечно, полной и могучей вѣрой въ методъ положительныхъ наукъ и въ частности въ возможность превращать математическій языкъ все больше и больше

въ орудіе, способное вырывать у природы тайны какъ прошлаго, такъ и будущаго. Неправда-ли, какая сильная вѣра въ тезисъ: „Все мірѣ—непрерывно закономѣрно въ своемъ развитіи, и слѣдовательно все можетъ быть записано аналитически“? Свою гордую, смѣлую мысль Лапласъ выразилъ въ такихъ словахъ: „Если бы разумъ, постигшій въ опредѣленное время всѣ силы, одушевляющія природу, взаимныя отношенія всѣхъ существъ, наполняющихъ ее, сверхъ того былъ такъ могучъ, что-могъ бы обнять эти данныя анализомъ и заключилъ бы въ одной формулѣ и законы движенія Вселенной, и полетъ мельчайшей пылинки, то для такого Высшаго Ума не существовало бы ничего неизвѣстнаго, и какъ будущее, такъ и прошлое было бы открыто предъ его очами. „Таже самая мысль, но поэтически и приблизительно, выражена Шиллеромъ:

Hab'ich des Menschen Kern erst untersucht,
So weiss ich auch sein Wollen und sein Handeln!“

Въ идеяхъ Кетле и Лапласа непрерывно-детерминистическія эволюціонныя теоріи получили весьма рѣзкую очерченность, и проводимыя далѣе еще глубже, онѣ стали все глубже и глубже проникать въ сознаніе человѣчества. Идеи Кетле, вылились въ очень простой и ясной формѣ въ трудахъ Бокля. Проводимый послѣдовательно детерминизмъ и эволюціонизмъ все рѣзче и рѣзче отражался и на соціальныхъ наукахъ вообще, и вотъ вскорѣ появляются работы К. Маркса, Энгельса и др., кои тщательно, детально и выпукло обрисовываютъ роль экономическихъ факторовъ въ жизни человѣчества. Матеріалистическое воззрѣніе на міръ все сильнѣй обнаруживалось въ человѣчествѣ, а съ нимъ вмѣстѣ воцарялся и позитивный фатализмъ, отливавшійся иногда въ форму безнадежности, такъ какъ свобода воли человѣка, его дѣянія, поступки

*) Quetelet, Lettres, p. 163.

и цѣли подчинялись неумолимому закону необходимости и причинности. Полное философское обоснованіе эволюціонной теоріи и работы мысли въ этомъ именно направленіи отлилось въ системѣ философіи Спенсера. Такимъ образомъ къ концу XIX-го вѣка идея непрерывно-детерминистическаго развитія всего сущаго оказалась въ значительной степени и уясненной человѣчествомъ, и использованной. Но человѣческая мысль никогда не останавливалась и никогда не была вѣрна одной и той же идеѣ вѣчно. Поэтому помимо идеи непревности она считалась иногда и съ противоположной ей идеей прерывности. Безспорно и идея прерывности была очень давно и очень рано извѣстна человѣку, и на протяженіи всей исторіи человѣческой мысли мы можемъ столкнуться съ ней: долгое время обѣ эти идеи уживались одновременно, не будучи связуемыми, благодаря чему вся Вселенная и ея жизнь казались чѣмъ-то неоднороднымъ, несвязаннымъ и капризнымъ, пляшущимъ по волѣ какой-то Высшей Силы, которая то вмѣшивалась въ жизнь міра, то снова предоставляла его самому себѣ, и слѣдовательно въ мірѣ постоянно происходили скачки, прерывы. Такъ Ньютонъ, напр., не умѣвшій объяснить себѣ устойчивости и прочности нашей солнечной системы подъ вліяніемъ возмущеній, существованіе коихъ обусловливалось взаимодѣйствіемъ другъ на друга составляющихъ ее массъ, допускалъ вмѣшательство Высшей Силы, которая время отъ времени регулировала движеніе планетъ.

Такъ Кювье, напр., также полагалъ, что типы животнаго не развивалась изъ одного какого-либо, а создавались Творцомъ каждый разъ. А міръ живой и мертвой природы или царства животныхъ и человѣка развѣ не раздѣлялись прерывомъ? И долгое время человѣчество колебалось и металось: то оно признавало царицей всего сущаго идею непрерывнаго и закономѣрнаго развитія, то оно допускало господство въ

Вселенной и прерывности, и непрерывности, и слѣдовательно насколько въ первомъ случаѣ ростъ и жизнь Вселенной были связно закономѣрны, настолько въ второмъ случаѣ жизнь міра до извѣстной степени казалась крайне причудливой и капризной, ибо въ этомъ случаѣ жизнь до поры, до времени текла непрерывно закономѣрно, но наступали моменты, когда эта непрерывность исчезала и давала мѣсто чему-то прерывному, часто чуждому и несвязному съ предыдущимъ. Въ зависимости отъ этого и міропониманіе въ вопросахъ свободы и не-свободы или необходимости было различно, и это различіе различнымъ образомъ отражалось на психикѣ человѣчества: человѣчество часто и въ томъ, и въ другомъ случаѣ приходило къ безнадежному фатализму... Но, какъ показываетъ настоящее, человѣчество не задохлось отъ фатализма, не подчинилось Року, но продолжаетъ развиваться, расти и все болѣе и болѣе дерзко пытается завоевывать себѣ какую-то непризнанную свободу, все сильнѣй и сильнѣй развиваетъ свою науку, свою борьбу при помощи послѣдней съ окружающимъ ее міромъ и все больше и больше порабощаетъ этотъ міръ... И несмотря на то, что человѣческая мысль все больше и больше убѣждается въ опутанности себя и всего Космоса желѣзными законами необходимости, въ тоже самое время человѣчество какъ будто становится сильнѣй, могучѣй, ибо оно завоеванными имъ законами необходимости потомъ пользуется для своихъ цѣлей и порабощаетъ помощью ихъ ту-же самую природу. Вотъ почему у самыхъ сильныхъ матеріалистовъ и эволюціонистовъ никогда не было унынія и отчаянія, ибо въ ихъ глазахъ наука никогда не была банкротомъ. Тѣмъ не менѣе извѣстно вѣдь, что были люди, и теоріи, кои обвиняли и науку, и эволюціонистовъ, и матеріалистовъ, какъ людей, религіозный культъ коихъ нерѣдко сводился къ наукѣ, въ полной несостоятельности и банкротствѣ. Почему это такъ? Отчего? Отвѣ-

тить на это, думается, можно: человѣчеству слишкомъ дорога мысль о свободѣ воли, человѣчество по существу очень горделиво, и оно не хочетъ и никогда не хотѣло быть слѣпымъ орудіемъ какой то силы или какихъ-то силъ... Кромѣ того въ мірѣ есть „зло“ и „добро“, и вотъ разгадать загадку о „добрѣ“ и „злѣ“, а также о свободномъ или не-свободномъ отношеніи къ этимъ двумъ факторамъ въ мірѣ и являлось всегда заманчивымъ и желаннымъ для человѣчества... Рѣшила-ли наука сполна эти вопросы? Нѣтъ, она рѣшила лишь ихъ отчасти, она дала, даетъ и будетъ давать возможность освѣщать все ярче и ярче эти двѣ категоріи... Наука XIX-го вѣка дала лишь одну свободу человѣку—это свободу, являющуюся не чѣмъ инымъ, какъ сознанной необходимостью... Но вѣдь людямъ этого мало: сознанная необходимость—такая то, а вотъ я возьму да и поступлю вопреки сознанной необходимости! Какая это будетъ необходимость—сознанная или несознанная? Сознаніе говоритъ вѣдь часто, что поступать можно такъ, а можно и иначе! Что это такое? Въ отвѣтъ на это мы предпошлемъ нѣсколько словъ. Обратимся на моментъ къ математикѣ—тамъ мы знаемъ, напр., многозначныя функціи, кои однимъ и тѣмъ же значеніямъ ея аргументовъ даютъ нѣсколько, иногда безчисленное множество значеній самой функціи. Представьте теперь себѣ, что Вамъ удалось изслѣдовать какое-либо явленіе, зависящее отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ факторовъ и притомъ, положимъ, на столько хорошо, что изслѣдуемая и открытая зависимость выразилась аналитически. Вотъ тогда мы уже видимъ здѣсь примѣръ *нѣсколькихъ возможностей* для развитія явленій въ мірѣ. XIX-ый вѣкъ доказалъ намъ, что т. н. мертвая часть міра до извѣстной степени не вся, конечно, интерпретируется математически. Отсюда непосредственно слѣдуетъ выводъ: такъ какъ нѣкоторыя явленія Вселенной управляются законами, выраженными аналитическими функ-

ціями и притомъ *не однозначными*, то ясно, что тотъ ходъ развитія міра, какой наблюдаемъ мы, не есть *единственно* возможный, и слѣдовательно можно логически строго мыслить и иную картину жизни міра—не ту, очевидцами и участниками коей мы являемся въ настоящее время. Примѣровъ многозначности въ мертвой природѣ можно указать много: извѣстно, напр., вѣдь изъ химіи, что вещества, состоящія изъ одного и того же числа однихъ и тѣже атомовъ, по своимъ качествамъ могутъ рѣзко отличаться другъ отъ друга; очевидно нужно еще „нѣчто“ помимо числа и характера атомовъ, чтобы получить какое-либо опредѣленное вещество, и слѣдовательно, если при случайной группировкѣ и взаимоотношеніяхъ опредѣленныхъ группъ атомовъ получается одно вещество, то при другой случайности могло получиться другое. Въ мірѣ въ извѣстномъ смыслѣ нѣтъ *абсолютнаго единообразія*! Этотъ тезисъ становится болѣе понятнымъ, если мы обратимся къ міру психики человѣка или къ исторіи. Возьмемъ, напр., исторію человѣчества и Ньютона или Петра В. Представьте себѣ, что какая либо случайность не дала бы возможности появиться этимъ міровымъ колоссамъ! Вѣдь ясно, что міръ развивался бы и безъ нихъ, но иначе! Такимъ образомъ идея многозначности не чужда развитію Вселенной. Еще яснѣй роль многозначности испытываетъ на себѣ каждый въ отдѣльности взятый человѣкъ съ своими желаніями, хотѣніями и цѣлями, съ своей *субъективной свободой* выбора. Къ вопросу о свободѣ человѣка мы еще вернемся! Сейчасъ же замѣтимъ, что изъ приведенныхъ только что нами соображеній о многозначности вовсе не слѣдуетъ, что послѣдняя уничтожаетъ детерминизмъ въ мірѣ: идея многозначности можетъ лишь сказать намъ, что, логически комбинируя міровыя факторы, можно мыслить себѣ и иное, отличное отъ наблюдаемаго развитіе міра, но она вовсе не отрицаетъ необходимости—изъ мысли

„могло бы быть иначе“, не слѣдуетъ вовсе, что то, что было, не могло не быть, но нельзя, конечно, отрицать, что идея многозначности дѣлаетъ *міръ свободнѣй*, чѣмъ онъ былъ бы безъ нея; для математика, напр., ясно, что, чѣмъ многозначность функціи выше, тѣмъ часто болѣе требуется всякаго рода дополнительныхъ, ограничительныхъ условій, чтобы функція изъ ряда возможныхъ значеній имѣла какое-либо опредѣленное.

Человѣческая мысль, изслѣдуя какое - либо сложное явленія, часто не можетъ сказать, съ какой именно изъ возможностей она будетъ имѣть дѣло, и вотъ стремленіе освѣтить точно это обстоятельство и создало особую вѣтвь математики „Теорію Вѣроятностей“, которая по словамъ Лапласа является „здравымъ смысломъ, переложеннымъ на счеты, такъ какъ она доставляетъ средства опредѣлять съ точностью то, что вѣрный умъ постигаетъ по инстинкту, часто не давая себѣ сознательнаго отчета“.

Такимъ образомъ и область возможнаго, и случайнаго теперь также могутъ быть обслѣдуемы математически. Но, разумѣется, здѣсь математическій анализъ существенно отличается отъ анализа въ другихъ отрасляхъ знанія, напр., въ механикѣ или физикѣ. Посмотримъ же, въ чёмъ наблюдается разница? Прежде всего, разумѣется, въ постановкѣ самихъ силлогизмовъ уже заключается значительная разница: силлогизмы областей возможнаго или случайнаго *не отличаются категоричностью.* Мы въ этомъ непосредственно убѣждаемся, сравнивая, напр., силлогизмъ категорической логики (такъ называетъ проф. Некрасовъ (Моск. Унив.) обычную логику):

a. Всѣ люди—смертны.

b. Сократъ—человѣкъ.

c. Слѣдовательно онъ—смертенъ.

съ некатегорическимъ силлогизмомъ *всеобщей* логики (по терминологіи Некрасова „всеобщая“ логика—теорія вѣроятностей) такого рода:

a. Въ данной странѣ изъ тысячи рожденныхъ дѣтей N лицъ по достиженіи возраста t лѣтъ, совершаютъ дѣйствіе A (напр., вступаютъ въ бракъ).

b. Родилось въ этой странѣ дитя Сократъ.

c. Слѣдовательно, Сократъ можетъ совершить фактъ A по достиженіи возраста t лѣтъ, и вѣроятность этого возможнаго событія опредѣляется N шансами изъ 1000 шансовъ.

Абсолютности утвержденія, какъ видно, въ послѣднемъ силлогизмѣ не заключается, а въ замѣнъ ея имѣется лишь бо́льшая или меньшая вѣроятность утвержденія. Это во перрыхъ, а во вторыхъ тутъ примѣшивается при изслѣдованіи и еще одно существенное „нѣчто“ — это прерывность, но это утвержденіе требуетъ подробностей.

Выше было выяснено, что идея непрерывности тогда только стала вполнѣ доступной и крайне плодотворной во всѣхъ областяхъ человѣческой мысли, когда она была переведена на языкъ математики, и слѣд. стало усчитываемой. Тоже самое теперь придется думать и объ идеѣ прерывности. Къ сожалѣнію въ отношеніи этой послѣдней въ настоящее время сдѣлано еще крайне мало. Въ математическихъ наукахъ правда прерывность уже изучается. Такъ цѣлый рядъ ученыхъ, какъ то Бріо и Букэ, Hankel, Дю-Буа-Реймондъ, Вейерштрассъ, Stolz, Mittag-Leffler, Borel и многіе другіе создали своими трудами цѣлую область „теорію прерывныхъ функцій“ и благодаря этому освѣтили и самое понятіе непрерывности математической отвлеченной, такъ какъ въ самой непрерывности, какъ это видно изъ работъ, напр., Вейерштрасса, имѣются категоріи: функція, напр., непрерывна, но не имѣетъ производной и др. случаи какъ будто странностей. Въ

самой первичной наукѣ математики „Ариѳметикѣ“ аксіома Архимеда или непрерывности *) и ея роль изслѣдовались, результатомъ чего созданы были новыя идеальныя числа, въ коихъ, напр., нѣтъ закона коммутативности умноженія, т. е. $ab \neq ba$. Далѣе г. Канторомъ были созданы безконечныя числа —трансфиниты съ любопытными признаками и свойствами, причемъ аксіомы Архимеда тамъ, вообще говоря „не существуетъ“. Математики на этомъ не остановились и изслѣдовали роль аксіомы Архимеда въ геометріи, и вотъ мы имѣемъ причудливыя полныя интереса и съ перваго взгляда странности идеальныя геометрическія системы Веронезе, итальянскаго ученаго, и Гильберта, системы, въ коихъ идея непрерывности подлежитъ существеннымъ ограниченіямъ. Но особенное вниманіе нужно обратить на ариѳмологію или теорію чиселъ, „царицу наукъ“ по выраженію Гаусса. Нашъ, покойный нынѣ, извѣстный математикъ проф. Московскаго университета Н. В. Бугаевъ первый взглянулъ на Аритмологію съ философской стороны и отмѣтилъ ея существенныя въ смыслѣ философскомъ черты. Главная особенность этой отрасли математики —крайняя индивидуальность объектовъ, ее составляющихъ. Такъ напр., каждое простое число обладаетъ нѣкоторыми ему спеціально присущими свойствами на столько своеобразными, что нѣтъ возможности почти никакой уловить, напр., общій законъ составленія ихъ, и вопросъ этотъ рѣшается приближенно. Главнымъ препятствіемъ, парализующимъ усилія математиковъ въ этой области, является прерывность, которая анализъ съ его выработанными и общими пріемами дѣлаетъ тамъ неприложимымъ. Аритмологія въ силу того, что прерывность гораздо общее непрерывности, является и болѣе общей вѣтвью математики, и болѣе трудной, такъ какъ въ ней чаще

*) Если $a < b$, то существуетъ такое число p — цѣлое, что $pa > b$.

приходится считаться съ индивидуальностью изслѣдуемыхъ объектовъ, въ силу чего и открываемыя истины анализа и аритмологіи отличаются другъ отъ друга крайне рѣзко: „Первая отличаются общностью и универсальностью, вторыя—таинственной индивидуальностью и красотой“ какъ говоритъ покойный проф. Бугаевъ. Гауссъ какъ то сказалъ, что „математика—царица наукъ и аритмологія—царица математики“. Его слова нашли себѣ подтвержденіе въ трудахъ послѣдующихъ ученыхъ, которые ставили, себѣ задачей всѣ аналитическія функція привести въ связь съ цѣлыми функціями, какъ простѣйшими, а эти послѣднія являются для общей теоріи функцій какъ бы цѣлыми числами для чиселъ вообще, благодаря чему происходитъ какъ бы аритметизація анализа—задача, полное рѣшеніе которой вѣроятно принадлежитъ будущему, такъ какъ аритмологія еще развита слабо. Но будущее этой задачи —и блестяще, и таинственно: вѣдь тогда и анализъ, и аритмологія будутъ сильно двигать другъ друга и обобщать.

И сейчасъ вѣдь теорія цѣлыхъ чиселъ, напр., пополнилась теоріей алгебрическихъ чиселъ, полной поразительныхъ и красивыхъ результатовъ, а связь между аналитическими непрерывными функціями и числовыми усматривается все лучше и лучше.... Такимъ образомъ прерывность въ математикѣ чистой и прикладной геометріи существуетъ. Идемъ дальше! Въ области механики, физики и химіи она также какъ будто наблюдается. Теорія удара, напр., теорія взрывовъ, переходъ тѣлъ изъ одного состоянія въ другое — (теорія Джиббса) все это факты, констатирующіе какъ будто прерывность въ природѣ. Относительно химіи можно сказать еще больше: непрерывность, вообще говоря, въ ней какъ будто не имѣетъ мѣста, ибо простыхъ тѣлъ *всякой плотности* мы не имѣемъ, и строго опредѣленное атомистическое строеніе веществъ проявляетъ и рѣзко очерченныя индивидуальныя свойства. Нашъ проф.

Дерптскаго унив. *Алексѣевъ* обнаружилъ даже удивительное совпаденіе: строго отвлеченная аритмологическаго характера теорія инваріантовъ формально совпадаетъ съ методами изученія химическихъ процессовъ господствовавшей атомистической теоріи. Такимъ образомъ атомы потребовали аритмологіи, слѣд. въ области химіи идея прерывности какъ будто имѣетъ мѣсто! Но замѣтимъ, что и анализъ несомнѣнно приложимъ къ химіи: доказательствомъ служитъ развивающаяся еще вѣтвь химіи—физическая химія. Въ области біологіи также констатируется и защищается нѣкоторыми изъ ученыхъ прерывность. Такъ, ученый де-Фризъ обнаружилъ опытомъ внезапное возникновеніе новыхъ видовъ растеній. Наконецъ въ областяхъ психологіи, соціологіи, исторіи также можно указать на прерывность. Напр., обратимся къ закону Вебера-Фехнера, гласящему, что, *ощущеніе растетъ пропорціонально логариѳму раздраженія*, закону удивительно цѣлесообразному, ибо всякому понятно, что въ интересахъ болѣе прочнаго и долгаго сохраненія живого организма послѣдній долженъ на *сильныя* раздраженія реагировать *не сильно*. Въ средѣ физическихъ и химическихъ процессовъ этотъ законъ чрезвычайно распространенъ, напр. охлажденіе тѣла, распространеніе тепла въ однородномъ тѣлѣ и др. связано такимъ закономъ. Но для человѣческой психики онъ *невсегда* точенъ, и объясняется это тѣмъ какъ разъ, что ощущеніе дѣйствуетъ у человѣка часто прерывно, что подтверждается опытами. Вѣрнѣй относительно закона Вебера-Фехнера въ примѣненіи къ человѣческой психики можно сказать слѣдующее: для раздраженій средней силы, болѣе или менѣе обычной, формулы вѣрны, для слабыхъ же и сильныхъ она оказывается совершенно неточной, и поэтому наблюдается, напр., что ниже извѣстно minimum'a или maximum'a раздраженіе сознаніемъ не ощущается, т. е. здѣсь мы явно наблюдаемъ прерывность. Далѣе изслѣдованіе массовыхъ явленій также

дадутъ намъ колебанія иногда прерывныя, но въ общемъ придерживающіяся нѣкоторыхъ среднихъ величинъ, какъ это доказываетъ *законъ большихъ чиселъ*. Появленіе крупныхъ, напр., историческихъ личностей, вообще говоря, повидимому изолированно прерывно. Итакъ прерывность при взглядѣ на явленія и процессы міра и сравненіи этихъ явленій и процессовъ каждаго въ отдѣльности съ цѣлымъ рядомъ одноименныхъ и однородныхъ съ нимъ какъ будто существуетъ, говоримъ „какъ будто" вопреки нашимъ математикамъ Бугаеву, Алексѣеву и Некрасову. Мы хотимъ этими словами сказать, что наблюдаемая нами *прерывность* все же едва-ли абсолютнаго характера: она будетъ скорѣй относительнаго. Когда я прерывность усчитываю и выражаю математически, то несомнѣнно она существуетъ, но существуетъ вѣдь въ моемъ сознаніи, отражающемъ бытіе. Если же мы обратимъ вниманіе на самое бытіе и возьмемъ какой либо фактъ, кажущійся прерывнымъ лишь при сравненіи и измѣреніи его съ ему подобными въ цѣломъ ряду ихъ, то вѣдь эта прерывность—слѣдствіе сравненія факта съ другими, т. е. прерывность эта есть абстрактная прерывность, прерывность *для нашего сознанія*, но почему я долженъ думать, что прерывность эта—прерывность бытія? Скорѣй можно думать обратное: съ точки зрѣнія роста и эволюціи самого-то факта прерывности, можетъ быть, вовсе и нѣтъ да и не можетъ быть, ибо вѣроятнѣй, что природа пустоты не любитъ и скачковъ также.... Напр., появленіе Ньютона или Петра В. съ точки зрѣнія средняго человѣка несомнѣнно прерывно, но вѣроятно вовсе не есть прерывно съ точки зрѣнія бытія—съ точки зрѣнія роста и развитія и того и другого. Для природы, вообще говоря, не существуетъ ни большого, ни малаго, и нашъ разумъ только производитъ такую классификацію всѣхъ явленій и процессовъ Вселенной. Не нужно думатъ, имѣя въ виду только что сказанное, что

роль идеи прерывнаго мы уничтожаемъ: мы хотимъ лишь сказать, что для бытія *прерывовъ* нѣтъ, но для познающаго міръ бытія разсудка они есть, и слѣдовательно роль аритмологіи въ будущемъ какъ наукѣ о прерывныхъ не — аналитическихъ функцій будетъ несомнѣнно значительна и важна, и будетъ всегда необходимой, ибо нашъ разумъ никогда не достигнетъ возможности постичь *все* полное развитіе Вселенной, а будетъ лишь стремиться къ этому, пользуясь и идеей непрерывнаго, гдѣ это можно, и прерывнаго, гдѣ ему природа будетъ казаться прерывной. Ясно отсюда, что человѣческая мысль въ интересахъ своего лучшаго будущаго должна энергично развивать въ себѣ какъ способность пользоваться идеей непрерывнаго, такъ и идеей прерывнаго, а равно и синтезомъ той и другой, на что еще давно указалъ Бугаевъ въ своей вступительной лекціи по теоріи чиселъ. Бугаевъ является не столько своеобразнымъ математикомъ-философомъ, что мы позволимъ себѣ остановиться нѣсколько на его философскомъ міровоззрѣніи, которое сложилось и выработалось у него подъ сильнымъ вліяніемъ системы Лейбница и идей математики, среди вѣтвей коей аритмологія съ идеей прерывности сыграла большую роль. Основная мысль Лейбница о соотносительности внѣшняго или матеріальнаго и внутренняго или духовнаго, психическаго удержана и Бугаевымъ. По мнѣнію Бугаева міръ есть совокупность *монадъ*—индивидуальностей, причемъ монады эти различны по своей структурѣ и сложности. Монада—единица въ томъ смыслѣ, что она обладаетъ признакомъ постоянства, причемъ каждая изъ нихъ представляетъ собой нѣчто *живое* въ томъ смыслѣ, что въ каждой изъ нихъ заложенъ потенціально опредѣленный запасъ энергіи—стремленій, хотѣній, и этими послѣдними—ихъ характеромъ и проявленіями ихъ во внѣ она *самоопредѣляется*. Міръ внутренній или духовный и внѣшній или матеріальный съ этой точки

зрѣнія являются соотносительными: внутренняя работа монады и есть работа *души* монады, а внѣшняя—борьба съ тѣмъ, что является не принадлежащимъ данной монадѣ—это все другое, разъ мы не обращаемъ вниманія на внутреннюю индивидуальную жизнь этого другого, является для насъ *матеріей*. Кромѣ законовъ *сохраненія вещества* и закона *сохраненіе энергіи* Бугаевъ ввелъ еще законъ *сохраненія прошлаго*, который формулируется такъ: *прошлое не исчезаетъ*, а *накопляется*, благодаря чему психизмъ монадъ все увеличивается, и онѣ все болѣе и болѣе совершенствуются сами, а также получаютъ возможность совершенствовать и другихъ, ибо *по закону монадологической солидарности* монады способно развиваться и измѣняться, только общаясь съ другими монадами. Другой-же законъ—*законъ монадологической косности* самоопредѣляетъ каждую изъ монадъ. Прогрессъ монады заключается въ непрерывномъ постоянномъ стремленіи къ *становленію другой монадой* болѣе совершенной, слѣдовательно конечная цѣль монады—стремленіе стать внѣ міра или надъ міромъ, сдѣлавшись предварительно міромъ. Что же касается самаго интереснаго вопроса, вопроса о *свободѣ воли*, то Бугаевъ его рѣшилъ, можно сказать, прямо математически. Въ самомъ дѣлѣ, всѣ душевные факты, процессы суть величины прерывныя; такъ, выше нами при изслѣдованіи закона Вебера была констатирована прерывность ощущеній; но тогда очевидно и представленія должны быть прерывными, какъ функціи ощущеній, а слѣдовательно и наши желанія, стремленія и наконецъ сама воля съ своими рѣшеніями, ибо и для ощущеній, и представленій, и цѣлей, и слѣд. рѣшеній въ зависимости отъ послѣднихъ мы всегда имѣемъ предѣлы, между коими все перечисленное можетъ варіировать, такъ что для Бугаева возможность свободы воли вытекаетъ почти съ *математической необходимостью*.

Правъ-ли Бугаевъ въ данномъ случаѣ? Да, онъ правъ, если бы было для всѣхъ яснымъ и очевиднымъ, что нашимъ представленіямъ о прерывныхъ функціяхъ и взаимоотношеніяхъ перемѣнныхъ, входящихъ въ нихъ, соотвѣтствуетъ нѣчто и въ Вселенной, въ самомъ бытіи, но доказательства подобнаго мы не имѣемъ и, можетъ быть, никогда не получимъ, ибо само бытіе нами познается, какъ отраженіе.....

Мысли Бугаева были затѣмъ среди русскихъ ученыхъ вновь подняты проф. Алексѣевымъ и Некрасовымъ, причемъ краеугольный камень разсужденій ихъ составляла идея прерывности (аритмологическія функціи), съ которой они бездоказательно сочетали идею *свободы*: изъ факты существованія въ нашемъ сознаніи области прерывныхъ функцій съ имъ обратными они сейчасъ же выводили дѣйствительное существованіе прерывовъ и у бытія, но вѣдь это—неправда! Это еще нужно доказать!...

Такимъ образомъ мы пришли къ слудующимъ выводамъ: и идея непрерывности, и идея прерывности царятъ въ нашемъ сознаніи и являются могучими рычагами въ движеніи человѣческой мысли на пути къ Истинѣ, но царятъ-ли прерывность и непрерыность въ самой природѣ—утвердительно сказать трудно: непрерывность—да, какъ будто есть, но прерывность—это еще вопросъ будущаго и, быть можетъ, даже ея нѣтъ въ природѣ, а слѣд. и вопросъ о свободѣ воли при посредствѣ только идеи прерывности едва-ли рѣшимъ.

Но унывать нечего отъ сознанія нашего безсилія въ данномъ случаѣ: человѣкъ умѣетъ пользоваться и идей прерывности, и идеей непрерывности, помощью ихъ вырываетъ тайны у природы, пользуется послѣдней и объясняетъ себѣ многое, и въ этомъ залогъ успѣха, прогресса и будущихъ завоеваній.